अध्याय 13

पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- **घनाभ जिसकी लंबाई = l, चौड़ाई = b और ऊँचाई = h**
  - (a) घनाभ का आयतन = lbh
  - (b) घनाभ का कुल या संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(lb + bh + hl)$
  - (c) घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2h(l + b)$
  - (d) घनाभ का विकर्ण = $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$
- **घन जिसका किनारा या कोर = a**
  - (a) घन का आयतन = a^3
  - (b) घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4a^2$
  - (c) घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$
  - (d) घन का विकर्ण = $a\sqrt{3}$
- **बेलन जिसकी त्रिज्या = r, ऊँचाई = h**
  - (a) बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$
  - (b) बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh$
  - (c) बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल= $2\pi r(r + h)$
- **शंकु जिसकी ऊँचाई = h, त्रिज्या = r और तिर्यक ऊँचाई = l**
  - (a) शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

(b) शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

(c) शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r (l + r)$

(d) शंकु की तिर्यक ऊँचाई $(l) = \sqrt{h^2 + r^2}$

- **गोला जिसकी त्रिज्या $= r$**

(a) गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

(b) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

- **अर्धगोला जिसकी त्रिज्या $= r$**

(a) अर्धगोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

(b) अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

(c) अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए –

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि एक बेलन की त्रिज्या आधी कर दी जाए और ऊँचाई दुगुनी कर दी जाए, तो उसका आयतन होगा

(A) वही (B) दुगुना (C) आधा (D) चार गुना

हल : उत्तर (C)

प्रश्नावली 13.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए –

1. यदि एक गोले की त्रिज्या $2r$ है, तो उसका आयतन होगा

(A) $\frac{4}{3}\pi r^3$ (B) $4\pi r^3$ (C) $\frac{8\pi r^3}{3}$ (D) $\frac{32}{3}\pi r^3$

2. एक घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 96 cm^2 है। घन का आयतन है:

(A) 8 cm^3 (B) 512 cm^3 (C) 64 cm^3 (D) 27 cm^3

3. एक शंकु की ऊँचाई 8.4 cm है और उसके आधार की त्रिज्या 2.1 cm है। इसे पिघला कर एक गोले के रूप में ढाला जाता है। गोले की त्रिज्या है

(A) 4.2 cm (B) 2.1 cm (C) 2.4 cm (D) 1.6 cm

4. यदि एक बेलन की त्रिज्या दोगुनी कर दी जाए और ऊँचाई आधी कर दी जाए, तो इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा

(A) आधा (B) दोगुना (C) वही (D) चार गुना

5. एक शंकु जिसकी त्रिज्या $\frac{r}{2}$ और तिर्यक ऊँचाई $2l$ है, का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा

(A) $2\pi r(l + r)$ (B) $\pi r(l + \frac{r}{4})$ (C) $\pi r(l + r)$ (D) $2\pi rl$

6. दो बेलनों की त्रिज्याएँ 2:3 के अनुपात में हैं तथा उनकी ऊँचाईयों का अनुपात 5:3 है। उनके आयतनों का अनुपात है

(A) 10 : 17 (B) 20 : 27 (C) 17 : 27 (D) 20 : 37

7. एक घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल 256 m^2 है। घन का आयतन है

(A) 512 m^3 (B) 64 m^3 (C) 216 m^3 (D) 256 m^3

8. 16m लंबे, 12m चौड़े और 4m गहरे एक गड्ढे में रखे जा सकने वाले 4 m × 50 cm × 20cm विमाओं वाले तख्तों की संख्या है

(A) 1900 (B) 1920 (C) 1800 (D) 1840

9. 10 m × 10 m × 5m विमाओं वाले एक कमरे में रखे जा सकने वाले सबसे लंबे डंडे की लंबाई है

(A) 15 m (B) 16 m (C) 10 m (D) 12 m

10. एक अर्धगोलाकार गुब्बारे में हवा भरने पर, उसकी त्रिज्या 6 cm से 12 cm हो जाती है। दोनों स्थितियों में गुब्बारे के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात है

(A) 1 : 4 (B) 1 : 3 (C) 2 : 3 (D) 2 : 1

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

***सत्य** या **असत्य** लिखिए और उत्तर का औचित्य दीजिए –*

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : एक लंब वृत्तीय बेलन एक गोले के परिगत है, जिसकी त्रिज्या r है, जैसाकि आकृति 13.1 में दर्शाया गया है। गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल बेलन के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल के बराबर है।

हल : सत्य।

यहाँ गोले की त्रिज्या = बेलन की त्रिज्या $= r$

गोले का व्यास = बेलन की ऊँचाई $= 2r$

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r\,(2r) = 4\pi r^2$

आकृति 13.1

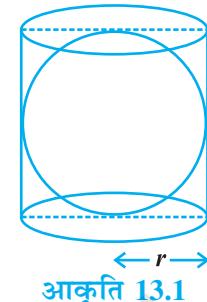
प्रतिदर्श प्रश्न 2 : एक घन का किनारा r cm है। यदि इस घन में से सबसे बड़ा संभव लंब वृत्तीय शंकु काटा जाता है, तो शंकु का आयतन (cm^3 में) $\frac{1}{6}\pi r^3$ है।

हल : असत्य।

शंकु की ऊँचाई $= r$ cm

आधार का व्यास $= r$ cm

अत:, शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot r$

$= \frac{1}{12}\pi r^3$

प्रश्नावली 13.2

*निम्नलिखित में से प्रत्येक में **सत्य** या **असत्य** लिखिए और अपने उत्तर का औचित्य दीजिए:*

1. एक गोले का आयतन उस बेलन के आयतन का $\frac{2}{3}$ होता है जिसकी ऊँचाई और व्यास गोले के व्यास के बराबर है।

2. यदि एक लंब वृत्तीय शंकु की त्रिज्या आधी कर दी जाए और ऊँचाई दुगुनी कर दी जाए, तो उसके आयतन में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

3. एक लंब वृत्तीय शंकु में ऊँचाई, त्रिज्या और तिर्यक ऊँचाई सदैव एक समकोण त्रिभुज की भुजाएँ नहीं होते हैं।

4. यदि एक बेलन की त्रिज्या दुगुनी कर दी जाए तथा उसके वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल में कोई परिवर्तन न किया जाए, तो उसकी ऊँचाई अवश्य ही आधी हो जाएगी।

5. किनारे $2r$ वाले एक घन में समावेशित किए जा सकने वाले सबसे बड़े लंब वृत्तीय शंकु का आयतन त्रिज्या r वाले अर्ध गोले के आयतन के बराबर होता है।

6. एक बेलन और एक लंब वृत्तीय शंकु के समान आधार और समान ऊँचाई हैं। बेलन का आयतन शंकु के आयतन का तिगुना है।

7. एक शंकु, अर्ध गोला और बेलन समान आधार और समान ऊँचाई के हैं। इनके आयतनों का अनुपात 1 : 2 : 3 है।

8. यदि किसी घन के विकर्ण की लंबाई $6\sqrt{3}$ cm है तो उसके किनारे की लंबाई 3 cm है।

9. यदि एक गोला एक घन के अंतर्गत है, तो घन के आयतन का गोले के आयतन से अनुपात $6 : \pi$ है।

10. यदि एक बेलन की त्रिज्या दुगुनी कर दी जाए और उसकी ऊँचाई आधी कर दी जाए, तो उसका आयतन दुगुना हो जाएगा।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: 5 cm त्रिज्या वाले एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 4 cm त्रिज्या वाले एक शंकु के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल का पाँच गुना है। शंकु की ऊँचाई और आयतन ज्ञात कीजिए ($\pi = \frac{22}{7}$ लेते हुए)।

हल : गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi \times 5 \times 5 \text{ cm}^2$

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi \times 4 \times l \text{ cm}^2$

जहाँ l शंकु की तिर्यक ऊँचाई है।

प्रश्नानुसार

$$4\pi \times 5 \times 5 = 5 \times \pi \times 4 \times l$$

या $\quad l = 5 \text{ cm}$

अब, $\quad l^2 = h^2 + r^2$

अत:, $\quad (5)^2 = h^2 + (4)^2$

जहाँ h शंकु की उँचाई है।

या $\quad (5)^2 - (4)^2 = h^2$

या $\quad (5 + 4)(5 - 4) = h^2$

या $\quad 9 = h^2$

या $$h = 3 \text{ cm}$$

शंकु का आयतन $$= \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \times 3 \text{ cm}^3$$

$$= \frac{22 \times 16}{7} \text{ cm}^3$$

$$= \frac{352}{7} \text{ cm}^3 = 50.29 \text{ cm}^3$$ (लगभग)

प्रतिदर्श प्रश्न 2: एक गोले की त्रिज्या में 10% की वृद्धि की जाती है। सिद्ध कीजिए कि इस गोले के आयतन में 33.1% की वृद्धि हो जाएगी।

हल : गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

त्रिज्या में 10% की वृद्धि = 10% r

अतः, बढ़ी हुई त्रिज्या $= r + \frac{1}{10}r = \frac{11}{10}r$

अब गोले का आयतन

$$= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{11}{10}r\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{1331}{1000} r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi \times 1.331 r^3$$

इसलिए, आयतन में वृद्धि $= \frac{4}{3}\pi \times 1.331 r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 \, (1.331 - 1) = \frac{4}{3}\pi r^3 \times 0.331$$

अतः, आयतन में प्रतिशत वृद्धि= $\left[\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \times 0.331}{\frac{4}{3}\pi r^3} \times 100\right] = 33.1$

प्रश्नावली 13.3

1. एक $16 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$ आंतरिक विमाओं वाले आयताकार पेटी में, धातु के गोले पैक किए जाते हैं जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 2 cm है। 16 गोले पैक किए (रखे) जाने पर पेटी को एक परिरक्षक द्रव से भर दिया जाता है। इस द्रव का आयतन ज्ञात कीजिए। अपना उत्तर निकटतम पूर्णांक तक दीजिए। [$\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।]

2. पानी को संचरित करने वाली एक टंकी एक घन के आकार की है। इसे पूरा भरने पर, इसमें पानी का आयतन 15.625 m^3 है। यदि इस समय टंकी में पानी की गहराई 1.3 m है तो इस टंकी में से पहले से प्रयुक्त किए गए पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

3. यदि 4.2 cm व्यास वाली एक गोलाकार गेंद को पूर्णतः पानी में डुबो दिया जाए, तो उसके द्वारा विस्थापित पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

4. उस शंक्वाकार तंबू को बनाने में लगे केनवास की मात्रा ज्ञात कीजिए जिसकी ऊँचाई 3.5 m है तथा आधार की त्रिज्या 12 m है।

5. एक ही धातु के बने दो ठोस गोलों का भार 5920 g और 740 g है। यदि छोटे गोले का व्यास 5 cm है, तो बड़े गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

6. कोई स्कूल अपने विद्यार्थियों को प्रत्येक दिन 7 cm व्यास वाले बेलनाकार गिलासों में दूध देता है। यदि गिलास दूध से 12 cm ऊँचाई तक भरा रहता है, तो ज्ञात कीजिए कि 1600 विद्यार्थियों के लिए प्रतिदिन कितने लीटर दूध की आवश्यकता होगी?

7. 2.5 m लंबे और 1.75 m त्रिज्या वाले एक बेलनाकार रोलर (roller) को जब सड़क पर रोल किया गया तो पाया गया कि उसने 5500 m^2 के क्षेत्रफल को तय कर लिया है। रोलर ने कितने चक्कर लगा लिए थे?

8. 5000 जनसंख्या वाले एक छोटे गाँव में प्रतिदिन प्रति व्यक्ति 75 लीटर पानी की आवश्यकता है। इस गाँव में $40 \text{ m} \times 25 \text{ m} \times 15 \text{ m}$ मापन की एक उपरि टंकी है। इस टंकी का पानी कितने दिन तक पर्याप्त रहेगा?

9. एक दुकानदार के पास 5cm त्रिज्या का एक लड्डू है। इतनी ही सामग्री से 2.5 cm त्रिज्या वाले कितने लड्डू बनाए जा सकते हैं?

10. 6 cm, 8 cm और 10 cm वाले एक समकोण त्रिभुज को उसकी 8 cm वाली भुजा के परितः घुमाया जाता है। इस प्रकार बनने वाले ठोस का आयतन और वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: वर्षा के पानी को, जो 6 m लंबाई और 4 m चौड़ाई के एक सपाट आयताकार पृष्ठ पर गिरता है, एक आंतरिक त्रिज्या 20 cm वाले एक बेलनाकार बर्तन में स्थानांतरित कर लिया जाता है। यदि वर्षा 1 cm हुई है, तो बेलनाकार बर्तन में पानी कितनी ऊँचाई तक भर जाएगा? अपना उत्तर निकटतम पूर्णांक तक दीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए।)

हल : मान लीजिए कि बेलनाकार बर्तन में पानी का स्तर h cm है।

अत: वर्षा के पानी का आयतन $= 600 \times 400 \times 1\ \text{cm}^3$

बेलनाकार बर्तन में पानी का आयतन $= \pi\,(20)^2 \times h\ \text{cm}^3$

प्रश्नानुसार,

$$600 \times 400 \times 1 = \pi\,(20)^2 \times h$$

या $$h = \frac{600}{3.14}\ \text{cm} = 191\ \text{cm}$$

प्रश्नावली 13.4

1. दोनों ओर से खुली एक बेलनाकार ट्यूब एक लोहे की चादर की बनी है जिसकी मोटाई 2 cm है। यदि इसका व्यास 16 cm और लंबाई 100 cm है तो ज्ञात कीजिए कि इस ट्यूब के बनाने में कितने cm^3 लोहे का प्रयोग किया गया है।

2. 28 cm व्यास वाली एक अर्धवृत्ताकार धातु की चादर को मोड़कर एक शंकु के आकार का खुला कप बनाया गया है। इस कप की धारिता ज्ञात कीजिए।

3. 165 m^2 क्षेत्रफल वाले एक कपड़े को 5 m त्रिज्या वाले एक शंक्वाकार तंबू के रूप में बनाया जाता है।

(i) इस तंबू में कितने विद्यार्थी बैठ सकते हैं, यदि औसतन एक विद्यार्थी भूमि पर $\frac{5}{7}\text{m}^2$ स्थान घेरता है?

(ii) इस शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

4. किसी फैक्ट्री के लिए पानी एक अर्धगोलाकार टंकी में संचरित किया जाता है जिसका आंतरिक व्यास 14 m है। इस टंकी में 50 किलोलीटर पानी है। इस टंकी को पूरा भरने के लिए पानी पंप द्वारा भरा जाता है। टंकी में पंप द्वारा भरे गए पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

5. दो गोलों के आयतनों का अनुपात 64 : 27 है। इनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

6. 4 cm भुजा वाले एक घन के अंदर एक गोला है जो उसकी भुजाओं को स्पर्श करता है। इन दोनों के बीच में रिक्त स्थान का आयतन ज्ञात कीजिए।

7. एक ही त्रिज्या वाले एक गोले और एक लंब वृत्तीय बेलन के आयतन बराबर हैं। बेलन का व्यास उसकी ऊँचाई से कितने प्रतिशत अधिक है?

8. 30 वृत्ताकार प्लेटों को जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 14 cm और मोटाई 3cm है, एक के ऊपर एक रखकर एक बेलनाकार ठोस बनाया जाता है। इस प्रकार बने बेलन का ज्ञात कीजिए :

(i) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल,

(ii) आयतन